Nos proponemos demostrar que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua entonces existen $m, M\in\mathbb{R}$ tales que $m\leq f(x)\leq M$ para todo $x\in[a,b]$ (i.e, f es acotada en $[a,b]$).

Puesto que $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, existe $\delta>0$ tal que si $a<x<a+\delta$ entonces $|f(x)-f(a)|<1$. Se sigue que $-1+f(a)\leq f(x)\leq 1+f(a)$ para todo $x\in[a,a+\delta)$.

Es así que para $a<t<a+\delta$ cualquiera vale que $f(x)$ es acotada en $[a,t]$.

Sea $A:=\{t\in[a,b]: f(x) \text{ es acotada en } [a,t]\}$.
Acabamos de ver que $A\neq\emptyset$. Es claro que b es cota superior de A. Por el Axioma del Supremo, existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $\alpha=\sup A$.

Es inmediato que $\alpha\leq b$. Queremos demostrar que $\alpha=b$.

Supongamos, por el contrario, que $\alpha<b$.
Entonces $a<\alpha<b$ y, dado que $\lim_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$, existe $\delta>0$ tal que $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)\subseteq[a,b]$ y, para todo $x\in(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$, $|f(x)-f(\alpha)|<1$. Resulta así que $-1+f(\alpha)\leq f(x)\leq 1+f(\alpha)$ para todo $x\in(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$.

Para tal $\delta>0$, existe $t\in A$ tal que $\alpha-\frac{\delta}{2}<t$.
Observemos entonces que $f(x)$ es acotada en $[a,t]$ y también en $[\alpha-\frac{\delta}{2},\alpha+\frac{\delta}{2}]\subseteq(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$.